OPÉRATIONS SUR LES POLYNÔMES

Exercice 1 - Carré - *L1/Math Sup* - ⋆

Soient a, b des réels, et $P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme P est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 2 - Quelques équations - *L1/Math Sup* - ⋆

Résoudre les équations suivantes, où l'inconnue est un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$:

1. $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$ **2**. $P'^2 = 4P$
3. $P \circ P = P$.

DIVISION EUCLIDIENNE

Exercice 3 - En pratique ! - *L1/Math Sup* - ⋆

Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de

1. $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $X^2 + 3X - 1$;
2. $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ par $X^2 - X - 7$;
3. $X^5 - X^2 + 2$ par $X^2 + 1$.

Exercice 4 - Reste de la division euclidienne - *L1/Math Sup* - ⋆

Quel est le reste de la division euclidienne de $(X + 1)^n - X^n - 1$ par

1. $X^2 - 3X + 2$ **2**. $X^2 + X + 1$ **3**. $X^2 - 2X + 1$.

Exercice 5 - Ils divisent ! - *L1/Math Sup* - ⋆

Démontrer que

1. $X^{n+1}\cos\big((n-1)\theta\big) - X^n\cos(n\theta) - X\cos\theta + 1$ est divisible par $X^2 - 2X\cos\theta + 1$;
2. $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ est divisible par $(X - 1)^2$.

Exercice 6 - A paramètre - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ pour que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

Exercice 7 - Divisibilité et composition - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soient $A, B, P \in \mathbb{K}[X]$ avec P non-constant. On suppose que $A \circ P | B \circ P$. En déduire que $A|B$.

Exercice 8 - Un reste - *L1/Math Sup* - ⋆⋆⋆

Soient n, p deux entiers naturels non nuls et soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Pour chaque $k \in \{0, \dots, n\}$, on note r_k le reste de la division euclidienne de k par p. Démontrer que le reste de la division euclidienne de P par $X^p - 1$ est le polynôme $R(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^{r_k}$.

ARITHMÉTIQUE

Exercice 9 - Calcul de pgcd - *Math Sup/L1* - ⋆

Déterminer les pgcd suivants :

1. $P(X) = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$ et $Q(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$;
2. $P(X) = X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1$ et $Q(X) = X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$.

Exercice 10 - Équation de Bezout - *L1/Math Sup* - ⋆

Trouver deux polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = 1$, où $A(X) = X^7 - X - 1$ et $B(X) = X^5 - 1$.

Exercice 11 - Polynômes ayant un facteur commun - *Math Sup/L1* - ⋆

Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non constants. Montrer que P et Q ont un facteur commun si, et seulement si, il existe $A, B \in \mathbb{C}[X]$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, tels que $AP = BQ$ et $\deg(A) < \deg(Q)$, $\deg(B) < \deg(P)$.

Exercice 12 - Equation de congruence - *Math Sup/L1/L3* - ⋆⋆

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tels que $(X-1)^2$ divise $P(X)+1$ et $(X+1)^2$ divise $P(X) - 1$.

Exercice 13 - Pgcd de deux polynômes - *Math Sup/Math Spé/L2* - ⋆⋆⋆

Soit $n, m \geq 1$. Déterminer le pgcd de $X^n - 1$ et $X^m - 1$.

RACINES

Exercice 14 - Somme des racines - *L1/Math Sup* - ⋆

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note, pour $p < n$, u_p la somme des racines de $P^{(p)}$. Démontrer que $u_0, \dots, u_{n-1}$ forme une progression arithmétique.

Exercice 15 - Déterminer les racines sachant que... - *L1/Math Sup* - ⋆

Dans cet exercice, on souhaite déterminer toutes les racines de polynômes de degré 3 ou 4 connaissant des informations sur ces racines.

1. Soit $P(X) = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$. Déterminer les racines de P sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.
2. Soit $Q(X) = X^4 + 12X - 5$. On note x_1, x_2, x_3, x_4 les racines de Q. On sait que $x_1 + x_2 = 4$.
   (a) Déterminer la valeur de x_1x_2, x_3x_4 et $x_3 + x_4$.
   (b) En déduire les valeurs des racines.

Exercice 16 - Racines rationnelles - *L1/Math Sup* - ⋆

Soit $P(X) = a_nX^n + \dots + a_0$ un polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$, avec $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$. On suppose que P admet une racine rationnelle p/q avec $p \wedge q = 1$. Démontrer que $p|a_0$ et que $q|a_n$. Le polynôme $P(X) = X^5 - X^2 + 1$ admet-il des racines dans $\mathbb{Q}$?

Exercice 17 - Avec le théorème de Rolle - *L1/Math Sup* - ⋆

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n ayant n racines réelles distinctes.

1. Démontrer que toutes les racines de P' sont réelles.
2. En déduire que le polynôme $P^2 + 1$ n'admet que des racines simples.
3. Reprendre les questions si l'on suppose simplement que toutes les racines de P sont réelles.

Exercice 18 - Isobarycentre - *L1/Math Sup* - $\star$

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$. Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ les racines de P, d'images respectives dans le plan complexe $A_1,\dots,A_n$. Soient $\beta_1,\dots,\beta_{n-1}$ les racines de P', d'images respectives dans le plan complexe $B_1,\dots,B_{n-1}$.

1. Montrer que les familles de points $(A_1,\dots,A_n)$ et $(B_1,\dots,B_{n-1})$ ont même isobarycentre.
2. Quelle est l'image de la racine de $P^{(n-1)}$.

Exercice 19 - Condition pour que... - *L1/Math Sup* - $\star\star$

1. Soit $P(X)=2X^3-X^2-7X+\lambda$, où λ est tel que la somme de deux racines de P vaut 1. Déterminer la troisième racine. En déduire la valeur de λ.
2. Soit $Q(X)=X^3-7X+\mu$ où μ est tel que l'une des racines de Q soit le double d'une autre. Déterminer les valeurs possibles des racines de Q, puis déterminer les valeurs de μ pour lesquelles cette condition est possible.

Exercice 20 - Équation - *L1/Math Sup* - $\star\star$

Déterminer tous les polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(0)=0$ et $P(X^2+1)=\big(P(X)\big)^2+1$.

Exercice 21 - Équations - *L1/Math Sup* - $\star\star\star$

1. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2)=P(X-1)P(X+1)$.
   (a) Démontrer que si z est racine de P, il existe une racine de P de module supérieur strict à z.
   (b) En déduire les polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ solutions.
2. Soit $P\in\mathbb{R}[X]\backslash\{0\}$ vérifiant $P(X^2)=P(X)P(X+1)$.
   (a) Démontrer que si z est racine de P, alors $z=j$ ou $z=j^2$.
   (b) En déduire les polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ solution.

Exercice 22 - Exponentiel ! - *L1/Math Sup* - $\star\star\star$

Soit, pour $n\geq 0$, $P_n(X)=\sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$.

1. Démontrer que P_n admet n racines simples complexes.
2. Démontrer que, si n est pair, une et une seule de ces racines est réelle, et que si n est pair, aucune des racines n'est réelle.

Exercice 23 - Polynômes à valeurs rationnelles - *L2/Math Spé/Oral Mines* - $\star\star\star$

Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ tel que, pour tout $q\in\mathbb{Q}$, on a $P(q)\in\mathbb{Q}$. Montrer que $P\in\mathbb{Q}[X]$.

DÉCOMPOSITION EN PRODUITS D'IRRÉDUCTIBLES

Exercice 24 - Décomposer ! - *L1/Math Sup* - $\star$

Décomposer en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. X^4+1 **2.** X^8-1 **3.** $(X^2-X+1)^2+1$

Exercice 25 - Décomposer ! - *L1/Math Sup* - ⋆

Soit P le polynôme $X^4-6X^3+9X^2+9$.

1. Décomposer $X^4-6X^3+9X^2$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire une décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 26 - Informations sur les racines - *L1/Math Sup* - ⋆

Factoriser le polynôme $8X^3-12X^2-2X+3$ sachant que ses racines sont en progression arithmérique.

Exercice 27 - Factorisation simultanée ! - *L1/Math Sup* - ⋆

On considère les deux polynômes suivants :

$$P(X)=X^3-9X^2+26X-24 \text{ et } Q(X)=X^3-7X^2+7X+15.$$

Décomposer ces deux polynômes en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, sachant qu'ils ont une racine commune.

Exercice 28 - De grand degré ! - *L1/Math Sup* - ⋆

Décomposer en produits d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X)=X^9+X^6+X^3+1$.

Exercice 29 - Tout polynôme positif est somme de deux carrés - *L1/Math Sup/Oral Centrale* - ⋆⋆

On note

$$\mathcal{S}=\{P\in\mathbb{R}[X];\ \exists P_1,P_2\in\mathbb{R}[X];\ P=P_1^2+P_2^2\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par produit. On pourra considérer l'application $\phi:\mathbb{C}[X]\to\mathbb{R}[X]$, $P\mapsto P\bar{P}$.
2. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P(x)\geq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $A,B\in\mathbb{R}[X]$ tels que $P=A^2+B^2$.

Formule de Taylor

Exercice 30 - - *Math Sup/Oral Centrale* - ⋆⋆⋆

Déterminer les polynômes P de degré supérieur ou égal à 1 et tels que $P'|P$.

Familles de polynômes

Exercice 31 - Polynômes de Legendre - *Math. Sup* - ⋆

On appelle polynômes de Legendre les polynômes $P_n=\big((X^2-1)^n\big)^{(n)}$. Calculer le degré de P_n et son coefficient dominant. Montrer que P_n s'annule exactement en n point deux à deux distincts de $]-1,1[$.

Opérations sur les polynômes

Exercice 1 - Carré - *L1/Math Sup* - ⋆

Si $P = Q^2$ est le carré d'un polynôme, alors Q est nécessairement de degré 2, et son coefficient dominant est égal à 1. On peut donc écrire $Q(X) = X^2 + cX + d$. On a alors

$$Q^2(X) = X^4 + cX^3 + (d + c^2)X^2 + dcX + d^2.$$

Par identification, on doit avoir $2c = 2a$, $2d + c^2 = b$, $2cd = 2$ et $d^2 = 1$. On trouve donc $c = a$ et $d = \pm 1$. Si $d = 1$, alors $c = 1$, et donc $a = 1$ et $b = 3$. Si $d = -1$, alors $c = -1$, $a = -1$ et $b = -1$. Les deux solutions sont donc

$$\begin{aligned} P_1(X) &= X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = (X^2 + X + 1)^2 \\ P_2(X) &= X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X + 1 = (X^2 - X - 1)^2. \end{aligned}$$

Exercice 2 - Quelques équations - *L1/Math Sup* - ⋆

1. Le polynôme nul est évidemment solution. Sinon, si P est solution, alors on a

   $$2\deg(P) = \deg(P) + 2$$

   ce qui prouve que $\deg(P)$ doit être égal à 2. Maintenant, si $P(X) = aX^2 + bX + c$, alors

   $$\begin{aligned} P(X^2) &= aX^4 + bX^2 + c \\ (X^2 + 1)P(X) &= aX^4 + bX^3 + (a + c)X^2 + bX + c. \end{aligned}$$

   On en déduit que $b = 0$, puisque $a + c = 0$. Les solutions sont donc les polynômes qui s'écrivent $P(X) = a(X^2 - 1)$, $a \in \mathbb{R}$.
2. Là encore, le polynôme nul est solution, et c'est la seule solution constante. Par ailleurs, si P est une solution non constante, alors son degré vérifie l'équation

   $$2(\deg(P) - 1) = \deg(P)$$

   ce qui entraîne que $\deg(P) = 2$. Maintenant, si $P(X) = aX^2 + bX + c$, alors

   $$\begin{aligned} P'^2 &= (2aX + b)^2 = 4a^2X^2 + 4abX + b^2 \\ 4P &= 4aX^2 + 4bX + 4c. \end{aligned}$$

   Ceci entraîne $a^2 = a$, donc $a = 1$ (le polynôme est de degré 2, $a \neq 0$), puis $c = b^2/4$. Les polynômes solutions sont donc le polynôme nul et les polynômes $P(X) = X^2 + bX + b^2/4$, avec $b \in \mathbb{R}$.
3. Tous les polynômes constants sont solutions. Si P est une solution qui n'est pas le polynôme constant, alors

   $$2\deg(P) = \deg(P)$$

et donc $\deg(P)=1$. Maintenant, si $P(X)=aX+b$, alors

$$\begin{array}{rcl} P\circ P(X) & = & a(aX+b)+b=a^2X+(ab+b)\\ P(X) & = & aX+b. \end{array}$$

On doit donc avoir $a^2=a$, soit $a=1$ (le degré est exactement 1), et $ab=0$, soit $b=0$. Finalement, on trouve que les solutions sont les polynômes constants et le polynôme $P(X)=X$.

Division euclidienne

Exercice 3 - En pratique ! - *L1/Math Sup* - ⋆

On trouve les résultats suivants :

1. Le quotient est X^2+2X+7, le reste est nul ;
2. Le quotient est X^2-3X-5, le reste est $X+3$;
3. Le quotient est X^3-X-1, le reste est $X+3$.

Exercice 4 - Reste de la division euclidienne - *L1/Math Sup* - ⋆

1. La méthode pour ce type d'exercice est toujours la même. On commence par écrire *a priori* le résultat de la division euclidienne, par exemple pour le premier polynôme :

$$(X+1)^n-X^n-1=Q(X)(X^2-3X+2)+aX+b,$$

où a et b sont deux réels. On évalue ensuite la relation en les racines du diviseur, qui sont ici 1 et 2. On trouve alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2^n-2 & = & a+b\\ 3^n-2^n-1 & = & 2a+b. \end{array}\right.$$

Et finalement on résoud le système pour trouver a et b, qui sont ici égaux à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 3^n-2^{n+1}+1\\ b & = & -3^n+2^{n+1}+2^n-3. \end{array}\right.$$

2. On écrit la même chose,

$$(X+1)^n-X^n-1=Q(X)(X^2+X+1)+aX+b,$$

et on utilise cette fois que les racines de X^2+X+1 sont j et j^2. Il suffit ici en réalité d'utiliser l'évaluation en j, sachant que tout nombre complexe s'écrit de façon unique sous la forme $x+jy$, avec $x,y\in\mathbb{R}$. On trouve :

$$(1+j)^n-j^n-1=Q(j)\times 0+aj+b.$$

On distingue ensuite suivant la valeur de n modulo 3, utilisant que

$$(1+j)^n-j^n-1=(-1)^nj^{2n}-j^n-1.$$

– Si $n \equiv 0$ [3], alors $j^{2n} = j^n = 1$, et donc on a

$$(-1)^n - 2 = aj + b$$

de sorte que le reste est $(-1)^n - 2$.

– Si $n \equiv 1$ [3], alors $j^n = j$ et donc $j^{2n} = j^2 = -1 - j$, $j^n = j$, ce qui donne

$$\big((-1)^{n+1} - 1\big)j + \big((-1)^{n+1} - 1\big) = aj + b.$$

Le reste est donc $\big((-1)^{n+1} - 1\big)(X + 1)$.

– Si $n \equiv 2$ [3], alors $j^{2n} = j$ et $j^n = j^2 = -1 - j$. On trouve

$$\big((-1)^n + 1\big) = aj + b.$$

Le reste est alors $\big((-1)^n + 1\big)X$.

3. On recommence en écrivant

$$(X + 1)^n - X^n - 1 = Q(X)(X^2 - 2X + 1) + aX + b,$$

et en remarquant que $X^2 - 2X + 1$ a pour racine double 1. Si on évalue en 1, on obtient une seule relation, à savoir

$$2^n - 2 = a + b.$$

Pour obtenir une seconde relation, il faut dériver la relation précédente et l'évaluer à nouveau en 1 (c'est toujours cette méthode qui fonctionne pour une racine double). On trouve :

$$n(X + 1)^{n-1} - nX^{n-1} = Q'(X)(X^2 - 2X + 1) + 2Q(X)(X - 1) + a,$$

ce qui donne la relation

$$n2^n - n = a.$$

On retrouve alors sans problèmes b, qui est égal à :

$$b = (-n + 1)2^n + n - 2.$$

Exercice 5 - Ils divisent ! - *L1/Math Sup* - ⋆

1. Pour prouver que $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divise $X^{n+1}\cos\big((n+1)\theta\big) - X^n\cos(n\theta) - X\cos\theta + 1$, il suffit de prouver que ce dernier polynôme s'annule en les deux racines (complexes) de $X^2 - 2X\cos\theta + 1$, à savoir $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Il suffit de prouver le résultat pour $e^{i\theta}$ car, le polynôme étant réel, si z est racine, son conjugué $\bar{z}$ est racine. On trouve

$$\begin{gathered} e^{i(n+1)\theta}\cos\big((n-1)\theta\big) - e^{in\theta}\cos(n\theta) - e^{i\theta}\cos\theta + 1 = \\ \Big(\cos\big((n+1)\theta\big)\cos\big((n-1)\theta\big) - \cos^2(n\theta) - \cos^2\theta + 1\Big) + \\ i\Big(\sin\big((n+1)\theta\big)\cos\big((n-1)\theta\big) - \sin(n\theta)\cos(n\theta) - \sin\theta\cos\theta\Big). \end{gathered}$$

Le reste n'est plus qu'une affaire de formules de trigonométrie :

$$\begin{aligned}
\cos\left((n+1)\theta\right)\cos\left((n-1)\theta\right) &= \frac{1}{2}\Big(\cos(2n\theta)+\cos(2\theta)\Big)\\
\cos^2(n\theta) &= \frac{1}{2}\Big(\cos(2n\theta)+1\Big)\\
\cos^2\theta &= \frac{1}{2}\Big(\cos(2\theta)+1\Big)\\
\sin\left((n+1)\theta\right)\cos\left((n-1)\theta\right) &= \frac{1}{2}\Big(\sin(2n\theta)+\sin(2\theta)\Big)\\
\sin(n\theta)\cos(n\theta) &= \frac{1}{2}\sin(2n\theta)\\
\sin\theta\cos\theta &= \frac{1}{2}\sin(2\theta).
\end{aligned}$$

2. C'est fois, on a affaire à une racine d'ordre 2, et il suffit de prouver que 1 est racine de $P(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et de $P'(X) = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1}$, ce qui est évident... Pour justifier cela, on peut faire appel à la partie du cours consacrée aux racines, ou partir de la division euclidienne

$$nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 = Q(X)(X-1)^2 + aX + b.$$

Faire $X = 1$ dans la relation précédente donne $a + b = 0$. De plus, si on dérive la relation précédente et qu'on fait à nouveau $X = 1$, on obtient $a = 0$.

Exercice 6 - A paramètre - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

On réalise la division euclidienne de $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ par $X^2 + 2$, et on trouve :

$$X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2 = (X^2+2)(X^2 + X + (\lambda - 2)) + (\mu - 2)X + 6 - 2\lambda.$$

Le polynôme $X^2 + 2$ divise donc $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ si et seulement si le reste est nul, donc si et seulement si $\mu = 2$ et $\lambda = 3$.

Exercice 7 - Divisibilité et composition - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

On écrit la division euclidienne de B par A, $B = AQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(A)$. On compose alors par P, et on obtient $B \circ P = A \circ PQ \circ P + R \circ P$. Or, le polynôme $A \circ P$ a pour degré $\deg(A) + \deg(P)$. Le polynôme $R \circ P$ a pour degré $\deg(R) + \deg(P)$. On en déduit que $\deg(R \circ P) < \deg(A \circ P)$ et donc que $B \circ P = A \circ PQ \circ P + R \circ P$ est la division euclidienne de $B \circ P$ par $A \circ P$. Mais on sait que $A \circ |B \circ P$ et donc on en déduit que $R \circ P$ est égal à 0. Ceci n'est possible que si $R = 0$, et donc $A|B$.

Exercice 8 - Un reste - *L1/Math Sup* - ⋆⋆⋆

On va démontrer que $X^p - 1$ divise $P - R$. En effet, le degré de R est inférieur strict à p, et R sera bien le reste dans la division euclidienne de P par $X^p - 1$. On écrit alors que

$$P - R = \sum_{k=0}^{n} a_k (X^k - X^{r_k}),$$

et il suffit de prouver que $X^p - 1$ divise chaque $X^k - X^{r_k}$. Écrivons alors $k = mp + r_k$, d'où l'on tire

$$X^k - X^{r_k} = X^{r_k}(X^{mp} - 1) = X^{r_k}(X^p - 1)(1 + X^p + \dots + X^{(m-1)p}).$$

$X^p - 1$ divise bien $P - R$!

Arithmétique

Exercice 9 - Calcul de pgcd - *Math Sup/L1* - ⋆

On applique l'algorithme d'Euclide. Le dernier reste non-nul donne un pgcd des deux polynômes.

1. On a successivement :

$$\begin{aligned} X^4-3X^3+X^2+4 &= (X^3-3X^2+3X-2)X+(-2X^2+2X+4)\\ X^3-3X^2+3X-2 &= (-2X^2+2X+4)\left(\frac{-X}{2}+1\right)+3X-6\\ (-2X^2+2X+4) &= (3X-6)\times\left(\frac{-2X}{3}-\frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

   Un pgcd est donc $3X-6$ (ou $X-2$).

2. On répète le même procédé :

$$\begin{aligned} X^5-X^4+2X^3-2X^2-1 &= (X^5-X^4+2X^2-2X+1)1+2X^3-4X^2+2X-2\\ X^5-X^4+2X^2-2X+1 &= (2X^3-4X^2+2X-2)((X^2)/2+X/2+1/2)+4X^2-2X+2\\ 2X^3-4X^2+2X-2 &= (4X^2-2X+2)(X/2-3/4)+(-X/2+1/2)\\ 4X^2-2X+2 &= (-X/2+1/2)(-8X+12)+8. \end{aligned}$$

   Ces deux polynômes sont donc premiers entre eux, leur pgcd vaut 1.

Exercice 10 - Équation de Bezout - *L1/Math Sup* - ⋆

On utilise l'algorithme d'Euclide. On a

$$\begin{aligned} x^7-x-1 &= (x^5-1)x^2+x^2-x-1\\ x^5-1 &= (x^2-x-1)(x^3+x^2+2x+3)+5x+2\\ x^2-x-1 &= (5x+2)(x/5-7/25)-11/25. \end{aligned}$$

On remonte ensuite les calculs. On va partir plutôt de

$$11=-25(x^2-x-1)+(5x-7)(5x+2)$$

pour éviter de trainer des fractions. On trouve alors successivement :

$$\begin{aligned} 11 &= -25(x^2-x-1)+(5x-7)\big((x^5-1)-(x^2-x-1)(x^3+x^2+2x+3)\big)\\ &= (-5x^4+2x^3-3x^2-x-4)(x^2-x-1)+(5x-7)(x^5-1)\\ &= (-5x^4+2x^3-3x^2-x-4)(x^7-x-1)+(5x^6-2x^5+3x^4+x^3+4x^2+5x-7)(x^5-1). \end{aligned}$$

Il suffit de diviser par 11 pour obtenir les polynômes U et V.

Exercice 11 - Polynômes ayant un facteur commun - *Math Sup/L1* - ⋆

Supposons que P et Q ont un facteur commun D. On factorise $P=DB$ et $Q=DA$, A et B vérifient les conditions voulues. Réciproquement, si $P\wedge Q=1$ et $AP=BQ$, alors $P|BQ$ et par le théorème de Gauss $P|B$. Ceci contredit les contraintes imposées à B.

Exercice 12 - Equation de congruence - *Math Sup/L1/L3* - ⋆⋆

On commence par remarquer que les polynômes $(X-1)^2$ et $(X+1)^2$ sont premiers entre eux, une relation de Bezout entre eux étant obtenue par la formule

$$\left(\frac{X}{4}+\frac{1}{2}\right)(X-1)^2+\left(\frac{-X}{4}+\frac{1}{2}\right)(X+1)^2=1.$$

On doit résoudre le système de "congruence" suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} P(X) & \equiv & -1\ [(X-1)^2] \\ P(X) & \equiv & 1\ [(X+1)^2] \end{array}\right.$$

La première équation donne $P(X)=-1+U(X)(X-1)^2$, et, en reportant dans la deuxième équation, on trouve

$$U(X)(X-1)^2\equiv 2\ [(X+1)^2].$$

On multiplie alors les deux membres par $(X/4+1/2)$, qui est tel que $(X/4+1/2)(X-1)^2\equiv 1\ [(X+1)^2]$. On en déduit

$$U(X)\equiv (X/2+1)\ [(X+1)^2]\implies U(X)=(X/2+1)+V(X)(X+1)^2.$$

Les solutions du système de congruence sont donc les polynômes de la forme

$$P(X)=-1+(X/2+1)(X-1)^2+V(X)(X-1)^2(X+1)^2,$$

où V est un polynôme quelconque. La seule solution dans $\mathbb{R}_3[X]$ est

$$P(X)=\frac{X^3}{2}-\frac{3X}{2}.$$

Exercice 13 - Pgcd de deux polynômes - *Math Sup/Math Spé/L2* - ⋆⋆⋆

Une idée possible est d'appliquer l'algorithme d'Euclide pour calculer le pgcd de ces deux polynômes. On suppose par exemple $n>m$, et on écrit $n=mq+r$, avec $0\leq r<m$. Alors on a :

$$X^n-1=X^{mp+r}-1=X^r(X^{mp}-1)+X^r-1.$$

Le point crucial est que $X^{mp}-1$ est divisible par X^m-1. En effet,

$$X^{mp}-1=(X^m-1)(X^{m(p-1)}+X^{m(p-1)}+\cdots+X^m+1).$$

Ainsi, $\textrm{pgcd}(X^n-1,X^m-1)=\textrm{pgcd}(X^m-1,X^r-1)$. Mais puisque $\textrm{pgcd}(n,m)=\textrm{pgcd}(m,r)$, on en déduit finalement que

$$\textrm{pgcd}(X^n-1,X^m-1)=X^{\textrm{pgcd}(n,m)}-1.$$

Racines

Exercice 14 - Somme des racines - *L1/Math Sup* - ⋆

Écrivons

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Alors, par les relations coefficients/racines, on sait que la somme des racines de P vaut $u_0 = -a_{n-1}/a_n$. Plus généralement, on a

$$P^{(p)}(X) = n(n-1)\dots(n-p+1)a_n X^{n-p} + (n-1)\dots(n-p)a_{n-1}X^{n-p-1} + \cdots + p!a_p,$$

de sorte que

$$u_p = \frac{(n-1)\dots(n-p)}{n(n-1)\dots(n-p+1)} \times \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{(n-p)}{n} \times \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

On a donc

$$u_{p+1} - u_p = \left(\frac{n-p-1}{n} - \frac{n-p}{n}\right) \times \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_{n-1}}{na_n}.$$

On obtient plus une progression arithmétique de raison $\frac{a_{n-1}}{na_n}$.

Exercice 15 - Déterminer les racines sachant que... - *L1/Math Sup* - ⋆

1. Notons $x_1,\ x_2$ et x_3 les trois racines, avec par exemple $x_3 = x_1 + x_2$. Alors les relations coefficients/racine nous disent que $x_1 + x_2 + x_3 = 8$. En particulier, on trouve $x_3 = 4$, et donc P se factorise en $P(X) = (X-4)Q(X)$. La division euclidienne donne $Q(X) = X^2 - 4X + 7$, dont les racines sont $2 + i\sqrt{3}$ et $2 - i\sqrt{3}$.
2. (a) On va utiliser les relations coefficients/racines. On sait que

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \implies x_3 + x_4 = -2.$$

De plus,

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0.$$

On peut réécrire ceci en

$$x_1x_2 + x_3x_4 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 0$$

soit

$$x_1x_2 + x_3x_4 = 4.$$

On a également

$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -12.$$

Ceci donne

$$x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = -12 \implies x_1x_2 - x_3x_4 = 6.$$

Ceci suffit à déterminer $x_1x_2 = 5$ et $x_3x_4 = -1$.

(b) De $x_1 + x_2 = 2$ et $x_1x_2 = 5$, on tire que x_1 et x_2 sont les racines de $X^2 - 2X + 5$, ie $1 \pm 2i$. De même, x_3 et x_4 sont les racines de $X^2 - 2X + 4$, ie $-1 \pm \sqrt{2}$.

Exercice 16 - Racines rationnelles - *L1/Math Sup* - ⋆

On écrit que $P(p/q)=0$ et on met tout au même dénominateur en multipliant par q^n. On trouve

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\dots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0.$$

On commence par isoler a_0q^n et on trouve que

$$p(a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+\dots+a_1q^{n-1})=-a_0q^n.$$

En particulier, $p|a_0q^n$. Puisque $p\wedge q=1$, on en déduit que $p|a_0$. De même, en isolant a_np^n, on trouve

$$q(a_{n-1}p^{n-1}+\dots+a_0q^{n-1})=-a_np^n,$$

soit $q|a_np^n$, soit, puisque $p\wedge q=1$, $q|a_n$. Si le polynôme X^5-X^2+1 admet une racine rationnelle p/q, alors $p|1$ et $q|1$, et donc $p=\pm1$ et $q=\pm1$. Autrement dit, les seules racines rationnelles possibles sont 1 et -1. Or, elles ne sont pas racines de Q. Donc Q n'admet pas de racines rationnelles.

Exercice 17 - Avec le théorème de Rolle - *L1/Math Sup* - ⋆

1. Soient $\alpha_1<\dots<\alpha_n$ les racines de P. Alors, la fonction polynômiale $x\mapsto P(x)$ est continue et dérivable sur chaque $[\alpha_i,\alpha_{i+1}]$ et s'annule aux bornes de cet intervalle. Par le théorème de Rolle, on en déduit l'existence de $\beta_i\in]\alpha_i,\alpha_{i+1}[$ tel que $P'(\beta_i)=0$. Les réels $\beta_1,\dots,\beta_{n-1}$ sont alors distincts, et sont des zéros de P'. Comme P' est de degré $n-1$, on a trouver toutes les racines de P'.
2. On commence par remarquer que les racines de P^2+1 sont nécessairement complexes, ce polynôme étant supérieur ou égal à 1 sur $\mathbb{R}$. De plus, sa dérivée est $2PP'$, dont les racines sont toutes réelles par hypothèse et d'après le résultat de la question précédente. Ainsi, P^2+1 et son polynôme dérivé n'ont pas de racines communes. Toutes les racines de P^2+1 sont donc simples.
3. Il suffit de prouver que toutes les racines de P' sont réelles, et on obtiendra par le même raisonnement le résultat de la question 2. Il faut cette fois tenir compte de l'ordre de multiplicité des racines. Ainsi, notons $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ les racines de P, α_i étant de multiplicité m_i. On sait que $m_1+\dots+m_p=n$. Chaque α_i reste racine de P', de multiplicité m_i-1 (avec l'abus de langage qu'une racine de multiplicité 0 n'est plus une racine...). De plus, le théorème de Rolle nous donne des nouvelles racines $\beta_1,\dots,\beta_{p-1}$, avec $\beta_i\in]\alpha_i,\alpha_{i+1}[$. La somme des multiplicités des racines de P' que l'on a trouvé est donc :

$$\sum_{i=1}^p(m_i-1)+(p-1)=n-p+p-1=n-1.$$

   Puisque P' est de degré $n-1$, on a trouvé toutes les racines de P' qui sont donc réelles.

Exercice 18 - Isobarycentre - *L1/Math Sup* - ⋆

1. On peut toujours supposer que P est unitaire. On l'écrit donc $P(X)=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots$. Les relations coefficients/racines donnent

$$-a_{n-1}=\alpha_1+\dots+\alpha_n.$$

P' s'écrit $P'(X) = nX^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \dots$. Les relations coefficients/racines donnent cette fois
$$\frac{-(n-1)a_{n-1}}{n} = \beta_1 + \dots + \beta_{n-1}.$$
Mettant ensemble ces deux équations, on voit facilement que
$$\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} = \frac{\beta_1 + \dots + \beta_{n-1}}{n-1},$$
ce qui est la relation désirée.

2. Par récurrence, P, P', P'', $\dots$, $P^{(n-1)}$ sont tels que la famille de leurs racines respectives ont même isobarycentre. En particulier, $P^{(n-1)}$ n'a qu'une seule racine qui est l'isobarycentre des racines de P.

Exercice 19 - Condition pour que... - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. Notons x_1, x_2 et x_3 les 3 racines, avec par exemple $x_1 + x_2 = 1$. Les relations coefficients/racines donnent $x_1 + x_2 + x_3 = -1/2$ (attention au coefficient dominant !), et donc $x_3 = -1/2$. Ainsi, on sait que $-1/2$ doit être racine de P. Autrement dit, P doit être divisible par $2X+1$. La division euclidienne de P par $2X+1$ donne
$$P(X) = (2X+1)(X^2 - X - 3) + \lambda + 3.$$
Il est donc nécessaire que $\lambda = -3$. C'est aussi suffisant, car dans ce cas les racines sont $-1/2$ et les racines de $X^2 - X - 3$, dont la somme fait 1.
2. Notons x_1, x_2 et x_3 les trois racines de Q, avec par exemple $x_2 = 2x_1$. Les relations coefficients/racines donnent $x_3 = -3x_1$, puis
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -7 \implies x_1^2 = 1.$$
On en déduit que $x_1 = \pm 1$. Si $x_1 = 1$, on a $x_2 = 2$ et $x_3 = -3$. On obtient alors $\mu = 6$. Dans le deuxième cas, on a $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$ et $\mu = -6$.

Exercice 20 - Équation - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $P(x^2+1) = \big(P(x)\big)^2 + 1$. Pour $x = 0$, on trouve $P(1) = 1$. Pour $x = 1$, on trouve $P(2) = 2$. Pour $x = 2$, on trouve $P(5) = 5$. Pour $x = 5$, on trouve $P(5^2+1) = 5^2+1$. Ceci nous incite à considérer la suite définie par $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ et $u_0 = 0$. Il est aisé de prouver que cette suite est strictement croissante. De plus, on prouve par récurrence sur n que $P(u_n) = u_n$. En effet, la propriété est vraie pour $n = 0, 1, 2, 3$. Si elle est vraie au rang n, alors on a
$$P(u_{n+1}) = P(u_n^2 + 1) = \big(P(u_n)\big)^2 + 1 = u_n^2 + 1 = u_{n+1}$$
ce qui prouve l'hérédité.
Posons alors $Q(X) = P(X) - X$. Q est un polynôme qui s'annule en chaque u_n. Comme les u_n sont tous différents, Q admet une infinité de racines. Donc Q est identiquement nulle et on a $P(X) = X$. Réciproquement, X convient.

Exercice 21 - Équations - *L1/Math Sup* - ⋆⋆⋆

1. (a) Soit z une racine de P. L'équation vérifiée par P s'écrit aussi $P\big((X+1)^2\big) = P(X)P(X+2)$, et donc $(z+1)^2$ est aussi racine de P. De même, $(z-1)^2$ est aussi racine de P. On va prouver qu'au moins un des deux nombres complexes $(z+1)^2$ ou $(z-1)^2$ est de module supérieur strict à z. En effet, $(z+1)^2-(z-1)^2 = 4z$, et donc

$$4|z| \leq |z+1|^2 + |z-1|^2.$$

Ainsi, l'un de ces deux nombres complexes est de module supérieur ou égal à $2|z|$. Si $|z| \neq 0$, le résultat est prouvé. Sinon, si $z=0$, le résultat est trivial.

   (b) Si P admet une racine (complexe), alors il en admet d'après la question précédente une infinité. C'est donc le polynôme nul. Les polynômes qui sont solutions de l'équation ne peuvent donc être que des polynômes constants, et les seuls polynômes constants solutions sont les polynômes $P(X)=0$ et $P(X)=1$.

2. (a) En raisonnant comme dans le premier cas, on voit que si z est racine de P, alors z^2 et $(z+1)^2$ sont aussi solutions. Par récurrence, z^{2n} et $(z+1)^{2n}$ seront racines pour tout entier n. Puisque le polynôme n'admet qu'un nombre fini de racines, les suites $(z^{2n})_n$ et $\big((z+1)^{2n}\big)_n$ ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs. Le premier point nous dit qu'on a nécessairement $z=0$ ou $|z|=1$. On note Γ_1 cet ensemble. Le second point nous dit que $z=-1$ ou $|z+1|=1$, ensemble que l'on note Γ_2. Il est facile de vérifier (par exemple, en dessinant ses ensembles), que les points d'intersection de Γ_1 et Γ_2 sont $0, 1, j$ et j^2. Mais si $z=0$ est racine, alors $(z+1)^2=1$ est aussi racine, ce qui n'est pas possible. De même, si $z=-1$ est racine, alors $(z+1)^2=0$ est racine, ce qui n'est pas (plus) possible. Donc les seules racines de P sont j et j^2.

   (b) Puisque P est à coefficients réels, j et j^2, qui sont des complexes conjugués, doivent être des racines de même multiplicité. On doit donc avoir $P(X) = \lambda(X-j)^n(X-j^2)^n = \lambda(X^2+X+1)^n$. Par identification des coefficients dominants, on trouve $\lambda=1$. Réciproquement, on vérifie facilement que les polynômes $P(X)=(X^2+X+1)^n$ sont solutions de l'équation.

Exercice 22 - Exponentiel ! - *L1/Math Sup* - $\star\star\star$

1. Il suffit de prouver que P_n et P_n' n'ont pas de racines communes. Mais $P_n' = P_{n-1}$ et donc, $P_n(X) = P_n'(X) + \frac{X^n}{n!}$. Ainsi, si $P_n'(a)=0$, alors $P_n(a) = \frac{a^n}{n!}$, et ceci ne peut être nul que si $a=0$. Reste à voir que $P_n(0)$ n'est jamais nul. Mais c'est clair car $P_n(0)=1$.
2. On va prouver par récurrence la proposition suivante :

   $\mathcal{P}_n$:
   - si n est pair, alors P_n n'admet pas de racines réelles ;
   - si n est impair, alors P_n admet une seule racine réelle a_n. De plus, $P_n(x)<0$ pour $x<a_n$ et $P_n(x)>0$ pour $x>a_n$.

   La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie. Supposons P_n vraie, et prouvons $\mathcal{P}_{n+1}$. Le point de départ est la relation $P_{n+1}' = P_n$.
   - Si $n+1$ est impair, alors n est pair et P_n ne s'annule jamais, et sa limite en $+\infty$ vaut $+\infty$. On en déduit que P_n est toujours strictement positif. Ainsi, P_{n+1} est strictement croissant. Ce polynôme ne peut s'annuler au plus qu'une fois et de plus $\lim_{-\infty} P_{n+1}(x) = -\infty$ et $\lim_{+\infty} P_{n+1}(x) = +\infty$ (n'oublions pas que $n+1$ est impair). Par le théorème

des valeurs intermédiaires, on obtient bien l'existence de a_{n+1} tel que $P_{n+1}(a_{n+1})=0$, et la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.
– Si $n+1$ est pair, alors n est impair, et $P_n(x)<0$ pour $x<a_n$ tandis que $P_n(x)>0$ pour $x>a_n$. On en déduit que P_{n+1} est décroissant de $-\infty$ à a_n, puis croissant de a_n à $+\infty$. Or,

$$P_{n+1}(a_n)=P_n(a_n)+\frac{a_{n+1}^{n+1}}{(n+1)!}=0+\frac{a_{n+1}^{n+1}}{(n+1)!}\geq 0$$

(n'oublions pas que $n+1$ est impair). Donc P_{n+1} est toujours strictement positif sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ lorsque $n+1$ est pair.

Exercice 23 - Polynômes à valeurs rationnelles - *L2/Math Spé/Oral Mines* - ⋆⋆⋆

Écrivons $P=a_nX^n+\dots+a_0$. Choisissons $q_0,\dots,q_n$ des entiers tous distincts, et posons $b_i=P(q_i)\in\mathbb{Q}$. Alors, si on pose

$$A=\begin{pmatrix}1&q_0&\dots&q_0^n\\1&q_1&\dots&q_1^n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&q_n&\dots&q_n^n\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}b_0\\b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix},$$

X est solution du système $AX=B$. Or, la matrice A est inversible : c'est une matrice de Vandermonde avec des q_i tous distincts. On a donc $X=A^{-1}B$. De plus, les formules de Cramer montrent que $A^{-1}\in M_{n+1}(\mathbb{Q})$. Les coefficients de X sont donc des rationnels, ce qui prouve le résultat voulu.

Décomposition en produits d'irréductibles

Exercice 24 - Décomposer ! - *L1/Math Sup* - ⋆

1. On commence par chercher les racines complexes pour factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis on regroupe les racines complexes conjuguées.

$$\begin{aligned}X^4+1&=&(X-e^{i\pi/4})(X-e^{3i\pi/4})(X-e^{7i\pi/4})(X-e^{9i\pi/4})\\&=&\big((X-e^{i\pi/4})(X-e^{9i\pi/4})\big)\big((X-e^{3i\pi/4})(X-e^{7i\pi/4})\big)\\&=&(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1).\end{aligned}$$

   Les deux polynômes de degré 2 que l'on obtient n'ont pas de racines réelles, ils sont donc irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2. On commence par utiliser une identité remarquable, puis la réponse à la question précédente :

$$\begin{aligned}X^8-1&=&(X^4-1)(X^4+1)\\&=&(X^2-1)(X^2+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)\\&=&(X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1).\end{aligned}$$

3. On commence par factoriser le polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ en remarquant qu'il s'agit alors d'une différence de deux carrés :

$$(X^2-X+1)^2+1=(X^2-X+1)^2-i^2=(X^2-X+1-i)(X^2-X+1+i).$$

On factorise alors chacun des polynômes de degré 2 dans $\mathbb{C}$, par exemple en calculant leur discriminant ou en remarquant que i (resp. $-i$) sont des racines évidentes. On trouve :

$$(X^2-X+1)^2+1=(X+i)(X-1-i)(X-i)(X-1+i).$$

En regroupant les termes conjugués, on trouve finalement :

$$(X^2-X+1)^2+1=(X^2+1)(X^2-2X+2).$$

Exercice 25 - Décomposer ! - *L1/Math Sup* - ⋆

1. On écrit simplement

$$X^4-6X^3+9X^2=X^2(X^2-6X+9)=X^2(X-3)^2.$$

2. L'astuce(?) est d'écrire $9=-(3i)^2$, et de reconnaitre une différence de deux carrés. Donc on a :

$$\begin{aligned} X^4-6X^3+9X^2+9 &= \big(X(X-3)\big)^2-(3i)^2\\ &= \big(X(X-3)-3i\big)\big(X(X-3)+3i\big)\\ &= (X^2-3X-3i)(X^2-3X+3i). \end{aligned}$$

On factorise chacun de ces deux polynômes. Le discriminant du premier est $9+12i=(\sqrt{3}(2+i))^2$. Ses racines sont $\alpha_1=\frac{3}{2}+\sqrt{3}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha_2=\frac{3}{2}-\sqrt{3}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$. Le discriminant du second est $9-12i=(\sqrt{3}(2-i))^2$, et ses racines sont $\beta_1=\frac{3}{2}+\sqrt{3}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $\beta_2=\frac{3}{2}-\sqrt{3}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$. La décomposition de P en produit d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ est donc

$$(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\beta_1)(X-\beta_2).$$

Pour obtenir la décomposition en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les racines complexes conjuguées, à savoir α_1 et β_1 d'une part et α_2 et β_2 d'autre part. On trouve

$$P=\big(X^2-(2\sqrt{3}+3)X+3\sqrt{3}+6\big)\big(X^2+(2\sqrt{3}-3)X-3\sqrt{3}+6\big).$$

Exercice 26 - Informations sur les racines - *L1/Math Sup* - ⋆

Puisque les racines sont en progression arithmétique, elles peuvent s'écrire $a-r$, a et $a+r$, où r est la raison de cette progression arithmétique. On obtient donc

$$\begin{aligned} 8X^3-12X^2-2X+3 &= 8(X-(a-r))(X-a)(X-(a+r))\\ &= 8X^3-24aX^2+*X-8a(a-r)(a+r). \end{aligned}$$

Par identification, on trouve $24a=12$, soit $a=1/2$, puis

$$-4\left(\frac{1}{4}-r^2\right)=3\implies r=\pm 1.$$

Les 3 racines sont donc $-1/2$, $1/2$ et $3/2$, et le polynôme se factorise en

$$8X^3 - 12X^2 - 2X + 3 = (2X+1)(2X-1)(2X-3).$$

Exercice 27 - Factorisation simultanée ! - *L1/Math Sup* - $\star$

Si a est une racine commune de P et Q, alors $X-a$ divise le pgcd de P et de Q. On commence donc par chercher ce pgcd, par exemple en appliquant l'algorithme d'Euclide. Ici, on a

$$\begin{aligned} X^3 - 9X^2 + 26X - 24 &= X^3 - 7X^2 + 7X + 15 + (-2X^2 + 19X - 39) \\ X^3 - 7X^2 + 7X + 15 &= (-2X^2 + 19X - 39)(-X/2 - 5/4) + (45X/4 - 135/4) \\ -2X^2 + 19X - 39 &= (45X/4 - 135/4)(-8X/45 + 52/45) \end{aligned}$$

Le pgcd de P et Q est donc $45X/4 - 135/4$, ou encore $X-3$. On divise alors P et Q par $X-3$, et on trouve :

$$P(X) = (X-3)(X^2 - 6X + 8) \text{ et } Q(X) = (X-3)(X^2 - 4X - 5).$$

On factorise encore chacun des polynômes de degré 2 pour trouver finalement :

$$P(X) = (X-3)(X-2)(X-4) \text{ et } Q(X) = (X+1)(X-3)(X-5).$$

On aurait aussi pu factoriser ces polynômes en cherchant des racines évidentes de chacun...

Exercice 28 - De grand degré ! - *L1/Math Sup* - $\star$

On va commencer par décomposer $Q(X) = X^3 + X^2 + X + 1$, dont -1 est racine évidente. On en déduit

$$Q(X) = (X+1)(X^2+1) = (X+1)(X-i)(X+i).$$

On a $P(X) = Q(X^3)$ et il s'agit maintenant de trouver les racines 3-ièmes de 1, i et $-i$. On en déduit que

$$\begin{aligned} P(X) &= (X+1)(X - e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3})(X - e^{i\pi/2})(X - e^{-i5\pi/6})(X - e^{-i\pi/6}) \\ &\quad (X - e^{-i\pi/2})(X - e^{i5\pi/6})(X - e^{i\pi/6}). \end{aligned}$$

Exercice 29 - Tout polynôme positif est somme de deux carrés - *L1/Math Sup/Oral Centrale* - $\star\star$

1. Cela suit directement de l'identité suivante, très simple à vérifier (mais moins à trouver !) :

   $$(P_1^2 + P_2^2)(Q_1^2 + Q_2^2) = (P_1Q_2 + P_2Q_2)^2 + (P_1Q_1 - P_2Q_1)^2.$$

   On peut la retrouver grâce à l'indication. En effet, si $P = P_1 + iP_2$ et $Q = Q_1 + iQ_2$, alors

   $$\phi(P)\phi(Q) = \phi(PQ)$$

   et les deux membres de l'égalité correspondent à l'égalité écrite ci-dessus.

2. Décomposons P en produits de facteurs irréductibles :

$$P(X)=\lambda\prod_{i=1}^{m}(X-a_i)^{m_i}\prod_{j=1}^{p}(X^2+\alpha_jX+\beta_j)$$

où chaque polynôme $X^2+\alpha_jX+\beta_j$ est de discriminant négatif. Puis P est toujours positif, il est clair que $\lambda\geq 0$ et que chaque m_i est pair. D'après la question précédente, il suffit de vérifier que chaque terme intervenant dans la décomposition précédente est une somme de deux carrés. Écrivant $\lambda=\mu^2$, on obtient $\lambda=\mu^2+0^2$. D'autre part, posons $m_i=2n_i$ et $A_i=(X-a_i)^{n_i}$. Alors $(X-a_i)^{m_i}=A_i^2+0^2$. Reste à traiter les polynômes du type $X^2-\alpha X+\beta$, de discriminant négatif. L'idée est d'utiliser la forme canonique de ces polynômes. En effet, on a

$$X^2+\alpha X+\beta=\left(X+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\frac{4\beta-\alpha^2}{4}.$$

Puisque le discriminant est négatif, on peut poser

$$\lambda=\sqrt{\frac{4\beta-\alpha^2}{4}}$$

et on a alors

$$X^2+\alpha X+\beta=\left(X+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\lambda^2.$$

Ce terme est aussi somme de deux carrés.

Formule de Taylor

**Exercice 30 - ** - *Math Sup/Oral Centrale* - ⋆⋆⋆

Puisque $P'|P$, $P=QP'$, et les considérations de degré font que Q est de degré 1. On peut donc écrire :

$$P=\lambda(X-\alpha)P'.$$

On applique ensuite la formule de Taylor à P en α :

$$P(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k,$$

$$P'(X)=\sum_{k=1}^{n}\frac{kP^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^{k-1},$$

$$\lambda(X-\alpha)P'(X)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda kP^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k.$$

Par identification, on obtient, pour tout k dans $\{0,\dots,n\}$:

$$\frac{kP^{(k)}(\alpha)}{k!}(\lambda k-1)=0.$$

Maintenant, $P^{(n)}(\alpha) \neq 0$, et donc $\lambda = 1/n$. Ceci entraîne par suite que, pour tout k dans $\{0, \ldots, n-1\}$, on a :

$$P^{(k)}(\alpha) = 0.$$

Ainsi,

$$P(X) = \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^n,$$

ce qui prouve que $P(X) = K(X-\alpha)^n$, où K est une constante. La réciproque se vérifie aisément.

Familles de polynômes

Exercice 31 - Polynômes de Legendre - *Math. Sup* - $\star$

Le terme de plus haut degré de P_n est obtenu en dérivant n fois X^{2n}. Il vaut donc $\frac{2n!}{n!}X^n$. On note ensuite $Q_p(X) = \big((X^2-1)^n\big)^{(p)}$ (de sorte que $P_n = Q_n$). Prouvons par récurrence finie sur p dans $\{1, \ldots, n\}$ que Q_p admet exactement p racines distinctes dans $]-1,1[$. Pour $p=1$, on sait que $Q_0(-1) = Q_0(1) = 0$, et le théorème de Rolle donne l'existence d'une racine dans $]-1,1[$. Supposons le résultat prouvé au rang p, et prouvons-le au rang $p+1$ avec $p+1 \leq n$. On note $-1 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_p < 1$ les p racines de Q_p dont l'existence est donnée dans $]-1,1[$. Remarquons en outre que, puisque 1 et -1 sont racines d'ordre n de Q_0, et que $p \leq n-1$, ces deux nombres sont encore racines de Q_p. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Rolle $p+1$ fois : une fois entre -1 et α_1, $p-1$ fois entre α_i et α_{i+1} et une fois entre α_p et 1. Enfin, puisque P_n a au plus n racines, on vient de toutes les trouver.